

ASPECTE PRIVIND UTILIZAREA ELEMENTELOR FINITE PLANE ÎN CALCULUL DEFORMAȚIILOR

ASPECTS RELATED TO THE USE OF PLANE FINITE ELEMENTS FOR THE CALCULATION OF DEFORMATIONS

VICTOR MATEI PETRESCU¹

Rezumat: Sunt prezentate unele efecte ale funcțiilor de interpolare utilizate în metoda elementului finit asupra deformațiilor unor modele plane. Este propusă și exemplificată o metodă de îmbunătățire a preciziei rezultatelor în situația în care se utilizează funcții de interpolare liniare.

Cuvinte cheie: metoda, elementului, finit, starea, plană, deformații, funcții, interpolare

Abstract: The paper presents some effects of the interpolation functions used in the finite element method on the deformations of plane models. A method for improving the accuracy of the results for the situation in which linear interpolation functions are used is presented and exemplified.

Keywords: method, finite, element, state, plane, strain, functions, interpolation

1. Introducere

Elementele finite se definesc ca rezultat al descompunerii unui domeniu de studiu în mai multe domenii cu interior disjunct, conectate prin intermediul unor noduri^[1]. În metoda elementului finit se utilizează un model al fenomenului studiat bazat pe aproximarea locală pe porțiuni sau subdomenii, prin utilizarea unor seturi de funcții continue pe porțiuni, având ca puncte de reper valorile nodale și, eventual, ale derivatelor până la un anumit ordin. În cele mai multe cazuri se folosesc funcții polinomiale, datorită ușurinței cu care ele pot fi derivate și integrate.

2. Tipuri de elemente finite și efecte ale ipotezelor simplificatoare asupra rezultatelor

Există multe tipuri de elemente finite utilizate pentru calculul eforturilor și deformațiilor, care diferă între ele prin formă, numărul de noduri sau funcțiile de interpolare utilizate^{[2],[3]}. Sunt prezentate în continuare, spre comparație, rezultate ale unor calcule efectuate pentru un model plan al unei bare elastice încastrate (figura 1), în care s-au utilizat tipurile de elemente și programele de calcul specificate în tabelul 1, considerându-se starea plană de deformații ($\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$).

¹ Asistent ing., Universitatea Tehnică de Construcții București (Assistant, ing., Technical University of Civil Engineering Bucharest), e-mail: matei@ppm.ro

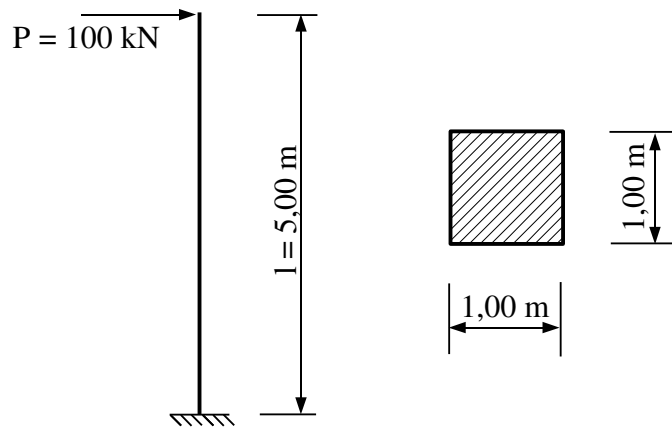


Figura 1 - Bară încastrată pentru care a fost calculată deplasarea maximă

Tabelul 1

Tipuri de elemente finite utilizate

Tip element	Descriere element	Program de calcul în care este utilizat elementul	Autorul (autorii) programului	Adresa de internet de unde se poate descărca programul
1	plan, 4 noduri, 2 grade de libertate / nod, funcții de interpolare liniare	OOFEM	Bořek Patzák și alții	http://oofem.org
2	spațial, 20 de noduri, 3 de grade de libertate / nod, funcții de interpolare pătratică	OOFEM	Bořek Patzák și alții	http://oofem.org
1	plan, 4 noduri, 2 grade de libertate / nod, funcții de interpolare liniare	mtfem 2.0.0	Matei Petrescu	http://matgts.sf.net
3	plan, 4 noduri, 2 grade de libertate / nod, funcții de interpolare liniare, cu îmbunătățiri	mtfem 2.0.0	Matei Petrescu	http://matgts.sf.net

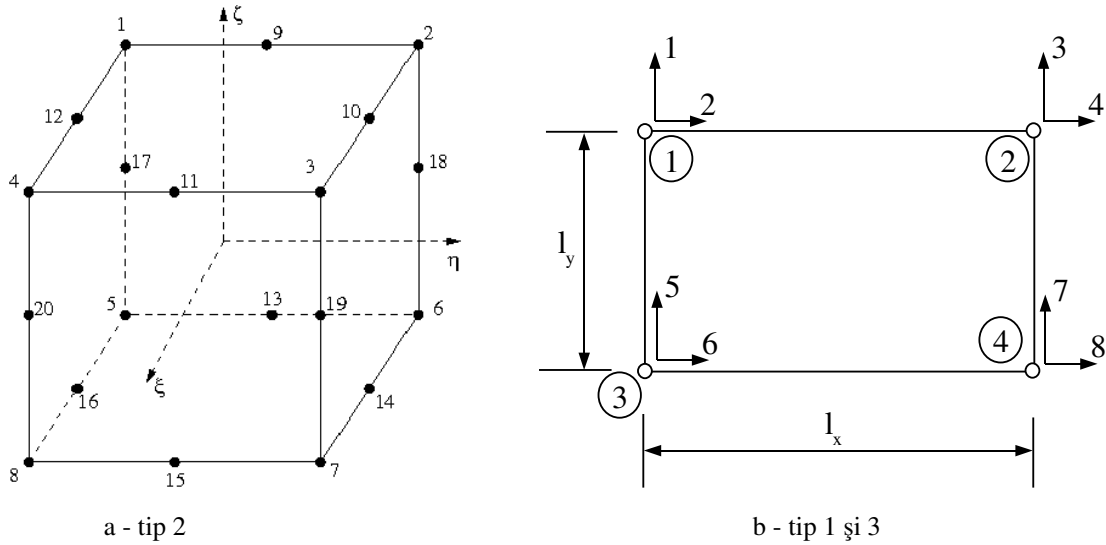


Figura 2 - Tipuri de elemente finite utilizate

Tipurile de elemente finite din tabelul 1 sunt reprezentate în figura 2. Dacă se consideră că relația dintre eforturi și deformații este (1), rigiditățile unui element plan de tipul 1 pot fi calculate cu ajutorul ecuației de lucru mecanic virtual (2).

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = [B] \cdot \{\epsilon\} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$k_{j,i} = \int_0^{l_x} \left(\int_0^{l_y} (\sigma_x^{(i)} \cdot \epsilon_x^{(j)} + \sigma_y^{(i)} \cdot \epsilon_y^{(j)} + \tau_{xy}^{(i)} \cdot \gamma_{xy}^{(j)}) dy \right) dx \quad (2)$$

unde:

$\sigma_x^{(i)}$, $\sigma_y^{(i)}$, $\tau_{xy}^{(i)}$ - eforturi unitare cauzate de o deplasare egală cu unitatea, aplicată pe direcția gradului de libertate "i";

$\epsilon_x^{(j)}$, $\epsilon_y^{(j)}$, $\gamma_{xy}^{(j)}$ - deformații specifice cauzate de o deplasare egală cu unitatea, aplicată pe direcția gradului de libertate "j".

Dacă se consideră variații liniare ale deplasărilor în interiorul fiecărui element și se ține seama de condiția de compatibilitate a deformațiilor elementelor alăturate, rigiditățile unui element pot fi exprimate sub forma relațiilor (3):

$$k_{1,1} = k_{7,7} = \frac{b_{2,2}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{3,3}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{3,2}}{4} - \frac{b_{2,3}}{4} ; \quad k_{1,4} = k_{7,6} = \frac{b_{2,3}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{3,1}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{2,1}}{4} - \frac{b_{3,3}}{4} ;$$

$$\begin{aligned}
k_{4,1}=k_{6,7} &= \frac{b_{3,2}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{1,3}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{1,2}}{4} - \frac{b_{3,3}}{4} ; & k_{3,3}=k_{5,5} &= \frac{b_{2,2}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{3,3}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{3,2}}{4} + \frac{b_{2,3}}{4} ; \\
k_{1,3}=k_{7,5} &= \frac{b_{2,2}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{3,3}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{2,3}}{4} - \frac{b_{3,2}}{4} ; & k_{3,1}=k_{5,7} &= \frac{b_{2,2}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{3,3}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{3,2}}{4} - \frac{b_{2,3}}{4} ; \\
k_{1,2}=k_{7,8} &= \frac{b_{2,3}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{3,1}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{2,1}}{4} - \frac{b_{3,3}}{4} ; & k_{2,1}=k_{8,7} &= \frac{b_{3,2}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{1,3}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{1,2}}{4} - \frac{b_{3,3}}{4} ; \\
k_{1,5}=k_{7,3} &= -\frac{b_{2,2}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{3,3}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{3,2}}{4} - \frac{b_{2,3}}{4} ; & k_{5,1}=k_{3,7} &= -\frac{b_{2,2}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{3,3}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{2,3}}{4} - \frac{b_{3,2}}{4} ; \\
k_{1,6}=k_{7,4} &= -\frac{b_{2,3}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{3,1}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{2,1}}{4} + \frac{b_{3,3}}{4} ; & k_{6,1}=k_{4,7} &= -\frac{b_{3,2}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{1,3}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{1,2}}{4} + \frac{b_{3,3}}{4} ; \\
k_{2,2}=k_{8,8} &= \frac{b_{3,3}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{1,1}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{1,3}}{4} - \frac{b_{3,1}}{4} ; & k_{1,7}=k_{7,1} &= -\frac{b_{2,2}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{3,3}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{2,3}}{4} + \frac{b_{3,2}}{4} ; \\
k_{3,5}=k_{5,3} &= -\frac{b_{2,2}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{3,3}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{2,3}}{4} - \frac{b_{3,2}}{4} ; & k_{2,8}=k_{8,2} &= -\frac{b_{3,3}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{1,1}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{1,3}}{4} + \frac{b_{3,1}}{4} ; \\
k_{4,6}=k_{6,4} &= -\frac{b_{3,3}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{1,1}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{1,3}}{4} - \frac{b_{3,1}}{4} ; & k_{4,4}=k_{6,6} &= \frac{b_{3,3}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{1,1}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{1,3}}{4} + \frac{b_{3,1}}{4} ; \\
k_{3,4}=k_{5,6} &= \frac{b_{2,3}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{3,1}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{2,1}}{4} + \frac{b_{3,3}}{4} ; & k_{4,3}=k_{6,5} &= \frac{b_{3,2}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{1,3}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{1,2}}{4} + \frac{b_{3,3}}{4} ; \\
k_{1,8}=k_{7,2} &= -\frac{b_{2,3}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{3,1}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{2,1}}{4} + \frac{b_{3,3}}{4} ; & k_{8,1}=k_{2,7} &= -\frac{b_{3,2}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{1,3}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{1,2}}{4} + \frac{b_{3,3}}{4} ; \\
k_{3,6}=k_{5,4} &= -\frac{b_{2,3}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{3,1}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{2,1}}{4} - \frac{b_{3,3}}{4} ; & k_{6,3}=k_{4,5} &= -\frac{b_{3,2}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{1,3}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{1,2}}{4} - \frac{b_{3,3}}{4} ; \\
k_{2,3}=k_{8,5} &= \frac{b_{3,2}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{1,3}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{1,2}}{4} + \frac{b_{3,3}}{4} ; & k_{3,2}=k_{5,8} &= \frac{b_{2,3}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{3,1}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{2,1}}{4} + \frac{b_{3,3}}{4} ; \\
k_{2,4}=k_{8,6} &= \frac{b_{3,3}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{1,1}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{1,3}}{4} + \frac{b_{3,1}}{4} ; & k_{4,2}=k_{6,8} &= \frac{b_{3,3}}{6} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{b_{1,1}}{3} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b_{3,1}}{4} + \frac{b_{1,3}}{4} ; \\
k_{3,8}=k_{5,2} &= -\frac{b_{2,3}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{3,1}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{2,1}}{4} - \frac{b_{3,3}}{4} ; & k_{8,3}=k_{2,5} &= -\frac{b_{3,2}}{3} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{b_{1,3}}{6} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b_{1,2}}{4} - \frac{b_{3,3}}{4} ;
\end{aligned}$$

$$k_{4,8}=k_{6,2}=-\frac{b_{3,3}}{3}\cdot\frac{l_x}{l_y}+\frac{b_{1,1}}{6}\cdot\frac{l_y}{l_x}-\frac{b_{1,3}}{4}+\frac{b_{3,1}}{4} ; k_{8,4}=k_{2,6}=-\frac{b_{3,3}}{3}\cdot\frac{l_x}{l_y}+\frac{b_{1,1}}{6}\cdot\frac{l_y}{l_x}-\frac{b_{3,1}}{4}+\frac{b_{1,3}}{4}$$

(3)

Relațiile (2) și (3) supraestimează rigiditatea la încovoiere a elementului și pot duce la rezultate nerealiste. Pentru atenuarea acestei probleme se folosesc de obicei elemente de ordin superior, precum elementele de tip 2 din tabelul 1, care au însă dezavantajul unui număr mai mare de noduri și de grade de libertate. Este propusă și verificată în continuare prin exemplul din figura 1 o metodă care permite utilizarea cu rezultate bune a elementelor cu 4 noduri și care stă la baza elementelor de tip 3 din tabelul 1. Se pornește de la observația că dacă matricea constitutivă [B] din relația (1) are forma arătată în relația (4), elementul nu are rigiditate la forfecare. În acest caz, el nu ar trebui să aibă rigiditate nici la încovoiere, ceea ce se rezolvă prin calculul rigidităților unui astfel de element cu ajutorul relațiilor (5), care au fost determinate direct din condiția ca rigiditatea la încovoiere a elementului să fie egală cu 0.

$$[B]=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 0 \\ c & c & 0 \end{pmatrix}$$

(4)

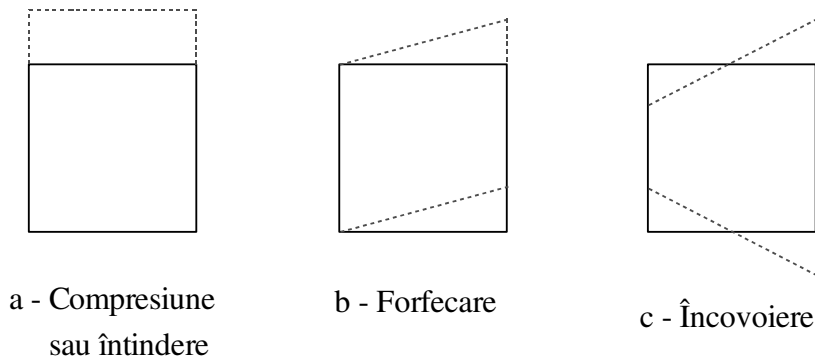


Figura 3 - Deformațiile unui element

$$k_{1,1}=k_{1,3}=k_{7,5}=k_{7,7}=-k_{1,5}=-k_{1,7}=-k_{7,1}=-k_{7,3}=\frac{b}{4}\cdot\frac{l_x}{l_y}-\frac{c}{4}$$

$$k_{2,2}=k_{2,6}=k_{8,4}=k_{8,8}=-k_{2,4}=-k_{2,8}=-k_{8,2}=-k_{8,6}=\frac{a}{4}\cdot\frac{l_y}{l_x}-\frac{c}{4}$$

$$k_{3,1}=k_{3,3}=k_{5,5}=k_{5,7}=-k_{3,5}=-k_{3,7}=-k_{5,1}=-k_{5,3}=\frac{b}{4}\cdot\frac{l_x}{l_y}+\frac{c}{4}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,4} &= k_{4,8} = k_{6,2} = k_{6,6} = -k_{4,2} = -k_{4,6} = -k_{6,4} = -k_{6,8} = \frac{a}{4} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{c}{4} \\
k_{1,2} &= k_{1,6} = k_{7,4} = k_{7,8} = -k_{1,4} = -k_{1,8} = -k_{7,2} = -k_{7,6} = \frac{c}{4} \cdot \frac{l_y}{l_x} - \frac{b}{4} \\
k_{3,4} &= k_{3,8} = k_{5,2} = k_{5,6} = -k_{3,2} = -k_{3,6} = -k_{5,4} = -k_{5,8} = \frac{c}{4} \cdot \frac{l_y}{l_x} + \frac{b}{4} \\
k_{2,1} &= k_{2,3} = k_{8,5} = k_{8,7} = -k_{2,5} = -k_{2,7} = -k_{8,1} = -k_{8,3} = \frac{c}{4} \cdot \frac{l_x}{l_y} - \frac{a}{4} \\
k_{4,1} &= k_{4,3} = k_{6,5} = k_{6,7} = -k_{4,5} = -k_{4,7} = -k_{6,1} = -k_{6,3} = \frac{c}{4} \cdot \frac{l_x}{l_y} + \frac{a}{4}
\end{aligned} \tag{5}$$

În general, matricea constitutivă [B] poate fi descompusă conform relațiilor (6):

$$[B] = [B]_1 + [B]_2 = \begin{pmatrix} \frac{b_{1,1} + b_{1,2}}{2} & \frac{b_{1,1} + b_{1,2}}{2} & 0 \\ \frac{b_{2,1} + b_{2,2}}{2} & \frac{b_{2,1} + b_{2,2}}{2} & 0 \\ \frac{b_{3,1} + b_{3,2}}{2} & \frac{b_{3,1} + b_{3,2}}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_{1,1} - b_{1,2}}{2} & \frac{b_{1,2} - b_{1,1}}{2} & b_{1,3} \\ \frac{b_{2,1} - b_{2,2}}{2} & \frac{b_{2,2} - b_{2,1}}{2} & b_{2,3} \\ \frac{b_{3,1} - b_{3,2}}{2} & \frac{b_{3,2} - b_{3,1}}{2} & b_{3,3} \end{pmatrix} \tag{6}$$

În programul de calcul "mtfem 2.0.0", elaborat de autorul acestui articol, rigiditățile unui element se determină în felul următor: întâi se calculează o matrice de rigiditate utilizându-se matricea constitutivă [B]₁ și relațiile (5), apoi o altă matrice de rigiditate pe baza matricei constitutive [B]₂ și a relațiilor (3) iar cele 2 matrice se adună; matricea rezultată este matricea de rigiditate a unui element. După cum se poate constata din rezultatele prezentate mai jos, această metodă duce la obținerea unor valori ale deplasărilor foarte apropiate de cele corespunzătoare utilizării unor elemente de ordin superior.

S-a considerat că materialul din care este alcătuită bara din figura 1 este elastic și izotrop, având caracteristicile E = 6000000 kPa și ν = 0,3. În cazul stării plane de deformații, deplasarea la vârf se poate determina cu relațiile (7).

$$\Delta_{max} = \frac{P \cdot \bar{P}}{3 \cdot E_0 \cdot I} + 1,25 \cdot \frac{P \cdot l}{G \cdot A} ; \quad E_0 = \frac{E}{1 - \nu^2} ; \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \tag{7}$$

În urma calculelor efectuate prin metoda elementului finit, în condițiile unei împărțiri în elemente conform figurii 4 au rezultat următoarele valori ale deplasării medii la vârf corespunzătoare fiecărui tip de element finit din tabelul 1:

- tip 1: $\Delta_1 = 7,3810$ mm
- tip 2: $\Delta_2 = 7,7949$ mm
- tip 3: $\Delta_3 = 7,7973$ mm

Cu ajutorul relațiilor (8) s-a obținut deplasarea $\Delta_4 = 7,8542$ mm. Deplasarea Δ_1 este semnificativ mai mică decât celelalte, ceea ce confirmă faptul că utilizarea unor funcții de interpolare liniare, respectiv a relațiilor (2) și (3), duce la supraestimarea rigidității la încovoiere a unui element.

```
Results for phase 1 - displacements
X:  0.000000 mm ...  7.79909 mm
Y: -1.14137 mm ...  1.14137 mm - after phase 0
```

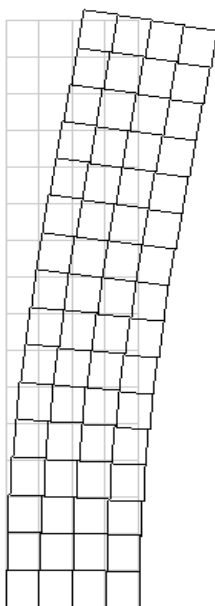


Figura 4 - Împărțirea în elemente finite și deplasările barei (mtfem-2.0.0)

3. Concluzii

S-a analizat efectul funcțiilor de interpolare asupra valorilor deformațiilor unui model plan, calculate prin metoda elementului finit. Funcțiile de interpolare liniare duc la subestimarea deformațiilor ca urmare a supraestimării rigidităților la încovoiere ale elementelor. S-a propus și verificat o metodă de îmbunătățire a preciziei calculului, fără dezavantajul introducerii unor noduri și grade de libertate suplimentare, pe care l-ar avea utilizarea unor funcții de interpolare de ordin superior.

Bibliografie

- [1] Păltineanu G., Matei P, Trandafir R. - Bazele Analizei Numerice, Editura Printech, București, 2001
- [2] Potts David M, Zdravković Lidija. - Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering. Thomas Telford Publishing, London, 1999
- [3] Patzák B. OOFEM Element library manual. Czech Technical University, Prague, 2008